26/2/2016

Αναλυτική Γεωμετρία

Μάθημα 4ο

Άσκηση Α

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & \lambda & \lambda+1 \end{bmatrix}$$, Να βρεθεί για τα διανύσματα $\lambda \in \mathbb{R}$ η βαθμίδα του A

Θεώρημα:

Έστω A ένας $n \times m$ πίνακας, τέτοιος ώστε: αν έχει μια κ-τάξης ορίζουσα $\neq 0$ και όλες οι $(k+1)$-τάξης ορίζουσες που την πλαισιώνουν $=0$ $\Rightarrow r(A)=k$ $(k<n,m)$

! Για την Ασκ. Α

Η μέγιστη ορίζουσα που υπάρχει είναι τάξης $3 \Rightarrow r(A)\leq 3$

Αφού υπάρχει (έστω ένα) μη-μηδενικό στοιχείο $r(A)\geq 1$

Παρατηρούμε ότι στον A, υπάρχει η $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Άρα $r(A)\geq 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & \lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & \lambda+3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ \lambda+3 & \lambda-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(\lambda-2) - (\lambda+3) = -3\lambda+6-\lambda-3 = -4\lambda+3 = 3-4\lambda$$

Είδαμε ότι υπάρχει η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ και η μοναδική ορίζουσα που την πλαισιώνει $= -4\lambda+3$

$\rightarrow$ Αν $-4\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3}{4} \Rightarrow r(A)=2$

$\rightarrow$ Αν $\underbrace{-4\lambda+3\neq 0}_{\Downarrow}$ $\Rightarrow \lambda \neq -\frac{3}{4} \Rightarrow r(A)=3$

$|A|\neq 0$

Άσκηση 3

Έστω $\vec{x}=(-1,1,3)$, $\vec{y}=(5,-2,9)$, $\vec{z}=(1,-1/2,1)$

Να βρεθεί μια βάση του $V=\langle \vec{x},\vec{y},\vec{z}\rangle$ και στην συνέχεια να συμπληρωθεί σε μια βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 9 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to -\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 9 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2-5\Gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 24 \\ 0 & 1/2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{\Gamma_2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V=\langle (1,-1,3),(0,1,8)\rangle$$

Επίσης είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί ο πίνακας μου είναι σε κλιμακωτή μορφή ή γιατί η βαθμίδα μου είναι 2

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ← Πρέπει να συμπληρώσουμε ένα ακόμα διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ και $|A| \neq 0$ αρα τα διανυσματα μου ειναι Γ.Α

⊛ 3 διανυσματα σε χωρο διαστασης 3 ειναι βαση

Διανυσματικος Λογισμος

Ορισμος

Ενα ευθυγραμμο τμημα το οποιο έχει αρχή και τελος λεγεται προσανατολισμενο $\left\{ \begin{array}{l} \text{αν } A \text{ αρχη} \xrightarrow{\text{συμβολ.}} \overrightarrow{AB} \\ \quad B \text{ τελος} \end{array} \right\}$

⊛ Αν B αρχη και A τελος $\xrightarrow{\text{συμβολ.}}$ $\overrightarrow{BA}$ και ειναι διαφορετικο απο το AB

Ορισμος

Δυο προσανατολισμενα τμηματα, λεμε οτι εχουν ιδια διευθυνση αν οι ευθειες στις οποίες ανηκουν ειναι παραλληλες

Ορισμος

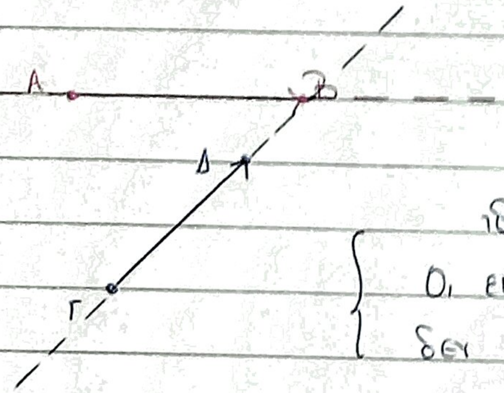
Δυο προσανατολισμενα τμηματα εχουν την ιδια φορα, αν εχουν την ιδια διευθυνση και αν μετακινωντας το ενα ωστε να συμπεσουν τα αρχικά σημεια τους, τοτε τα τελικά τους σημεια βρισκονται προς το ιδιο μερος (ως προς την αρχη τους)
Διαφορετικα θα λεμε οτι εχουν αντιθετη φορα

π.χ

(1)

Προσανατολισμενο ευθυγρ. τμημα

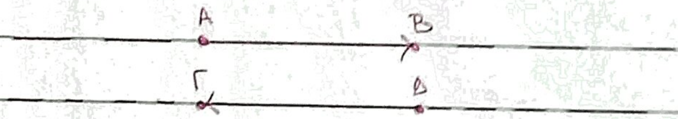
(2)



Τα $\vec{AB}, \vec{ΓΔ}$ δεν εχουν την ιδια διευθυνση

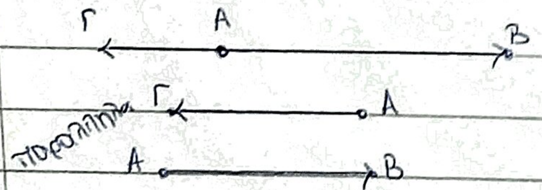
{ Οι ευθειες στις οποιες ανηκουν δεν ειναι μεταξυ τους παραλληλες }

(3)



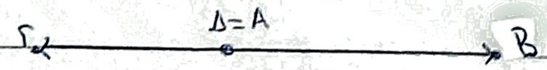
Προσανατολισμενα ευθυγρ. τμηματα με ιδια διευθυνση

(4)



φορα

(5)



Τα τελικα σημεια βρισκονται σε διαφορετικες πλευρες ως προς την αρχη ⇒ οχι ιδια φορα

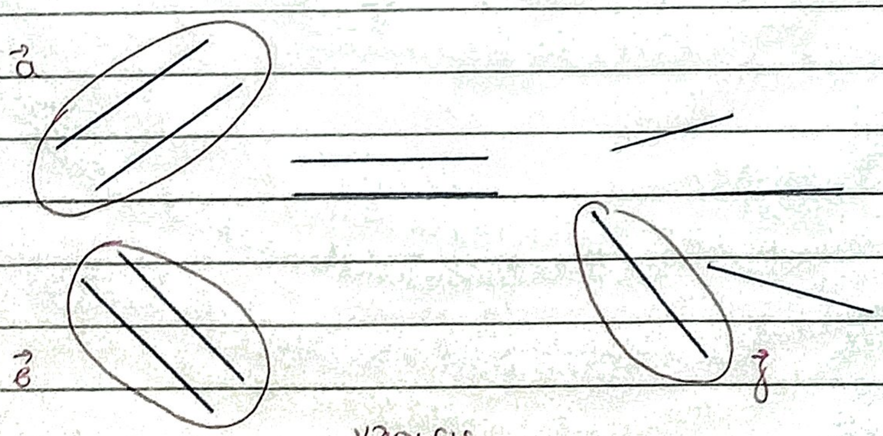
Ορισμος
Μετρο ενος προσανατολισμενου ευθυγραμμου τμηματος $\vec{AB}$ καλειται το μηκος αυτου
- Συμβολισμος: $|\vec{AB}|$

• Στο συνολο V = {προσανατολισμενων ευθυγραμμων τμηματων} οριζεται μια σχεση ισοδυναμιας.

μια διμελης σχεση καλειται σχεση ισοδυναμιας αν:
1) ανακλαστικη $a R a$
2) συμμετρικη $a R b \Rightarrow b R a$
3) μεταβατικη $a R b,\ b R \gamma \Rightarrow a R \gamma$

⊛ Το "σημαντικο" ειναι οτι μια σχεση ισοδυναμιας διαμεριζει το συνολο μου σε κλασεις ισοδυναμιας
- Αν το συνολο $a \in A \Rightarrow$ ολα τα $b \in A$: $b R a$ ανηκουν στην ιδια κλαση

π.χ
Εστω A = {συνολο ολων των ευθειων του επιπεδου},
R = {θα λεμε οτι αν $a, b \in A$ $\ a R b \Leftrightarrow a \parallel b$}



κλασεις

Αντιπροσωποι: → μπορουν να χωρισουν ενα συνολο με απειρα στοιχεια σε πεπερασμενο πληθος.

• Οριζεται η σχεση $R = \left\{ \begin{array}{l} \text{ισχυει οτι } \vec{a}\, R\, \vec{b} \\ \text{αν και μονο αν τα } \vec{a}, \vec{b} \\ \text{εχουν ιδια διευθυνση, ιδια φορα} \\ \text{ιδιο μετρο} \end{array} \right\}$

Αποδεικνυεται οτι η R ειναι σχεση ισοδυναμιας. Αρα η R διαμεριζει το V σε κλασεις ισοδυναμιας

Ορισμος

Καθε μια τετοια κλαση ισοδυναμιας οριζεται ως διανυσμα

- Συμβολισμος: $\vec{a}$ ή $\vec{AB}$

Ορισμος

Δυο διανυσματα λεγονται ισα αν ανηκουν στην ιδια κλαση ισοδυναμιας (δηλ: $\vec{a} = \vec{b}$ αν $\vec{a}, \vec{b}$ ιδια διευθυνση, φορα, μετρο)

Ειδικά διανυσματα

(1) Μηδενικο διανυσμα οριζεται διανυσμα μετρου 0 και ακαθοριστης διευθυνσης (συμβ: $\vec{0}$)

(2) Μοναδιαιο διανυσμα οριζεται το διανυσμα μετρου 1

(3) Αντιθετο διανυσμα $\vec{a}$ (ενος διανυσματος $\vec{b}$) λεγεται το $\vec{a}$: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ και τα $\vec{a}, \vec{b}$ εχουν αντιθετη φορα.

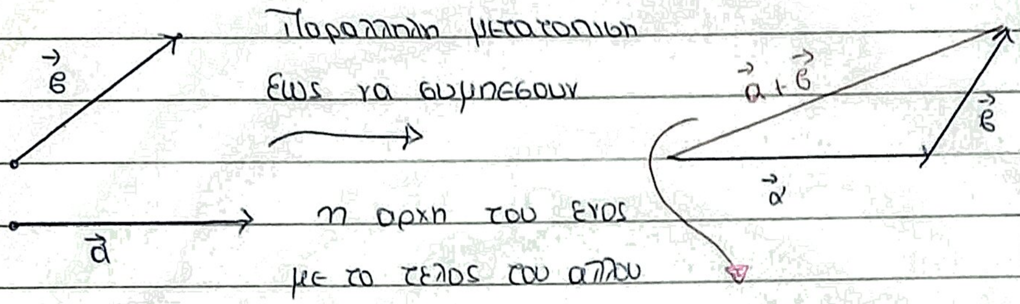
(συμβ: $-\vec{a}$ ή αν $\vec{a} = \vec{AB}$ $-\vec{a} = \vec{BA}$)

Ορισμος

Εστω V το συνολο των διανυσματων του χωρου μας. Ο V λαμβανει δομη διανυσματικου χωρου επι του $\mathbb{R}$.

Εστω V το συνολο των διανυσματων του χωρου μας. Ο V λαμβανει δομη διανυσματικου χωρου επι του $\mathbb{R}$. Οριζοντας τις παρακατω πραξεις,

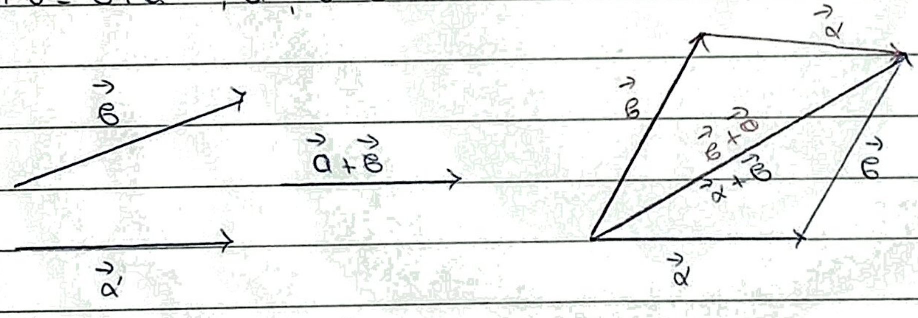
α) αθροισμα (προσθεση) διανυσματων $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$



νεο διανυσμα με αρχη την αρχη του $\vec{\alpha}$ και τελος το τελος του $\vec{\beta}$

Θ Επαληθευση των ιδιοτητων της "+" για τον V ως διαν. χωρο

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$

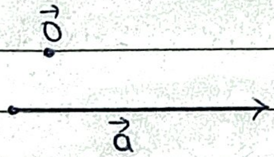


$\Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$

ii) $\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$ Θα το δειξω

$\Rightarrow (\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

iii) Προφανώς υπάρχει το $\vec{0} \in V$: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$, $\forall \vec{a} \in V$



iv) Παρατηρούμε ότι $\forall \vec{a} \in V , \exists -\vec{a} \in V : \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

• Πολλαπλασιασμός στον V επί του $\mathbb{R}$

Έστω $\vec{a} \in V$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$

Ορίζουμε το $\lambda \cdot \vec{a}$ να είναι ένα νέο διάνυσμα:

1) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$ και η φορά του

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{cases} \text{ίδια φορά του } \vec{a}, & \text{αν } \lambda>0 \\ \text{αντίθετη φορά του } \vec{a}, & \text{αν } \lambda<0 \\ \vec{0} & \text{αν } \lambda=0 \end{cases}$$

Επαληθεύεται ότι ο V πληρεί και τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού $\Rightarrow$ άρα διανυσματικός χώρος

π.χ

Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{a} \in V$

Ν.δ.ο $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ ΝΔΟ → α) έχουν ίδιο μέτρο
→ β) έχουν ίδια φορά

α) $|(\lambda\mu)\vec{a}| = |\lambda\mu|\,|\vec{a}| = |\lambda|\,|\mu|\,|\vec{a}| = |\lambda|\,(|\mu|\,|\vec{a}|) = |\lambda|\,|\mu\vec{a}| = |\lambda(\mu\vec{a})|$

β) Έστω η φορά του $\vec{a}$ $\xRightarrow{\lambda,\mu>0}$ $(\lambda\mu)\vec{a}$ έχει ίδια φορά με το $\vec{a}$

και $\mu>0 \Rightarrow \mu\vec{a}$ έχει ίδια φορά με $\vec{a}$

$\lambda>0 \Rightarrow \lambda(\mu\vec{a})$ έχει ίδια φορά με το $\mu\vec{a}$ $\Big\} \Rightarrow \lambda(\mu\vec{a})$ ίδια φορά με $\vec{a}$

Ευκολα βλεπουμε οτι

2) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

4) προφανως $\exists\, 1 \in \mathbb{R} : \vec{a}\cdot 1 = \vec{a}, \ \forall \vec{a} \in V$

Προταση

Αν $\vec{a}, \vec{b} \in V$: τοτε αυτα ειναι γραμμικα εξαρτημενα $\Longleftrightarrow$ εχουν την ιδια διευθυνση

Αποδειξη

Εστω $\vec{a}, \vec{b}$ Γ.Ε $\Rightarrow \exists\, (\lambda,\mu) \neq (0,0) : \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$

$\xrightarrow[\text{Εστω } \lambda\neq 0]{\text{χβγ}} \vec{a} = \left(-\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\vec{b} \Rightarrow$ τα $\vec{a}, \vec{b}$ ιδια διευθυνση

Αντιστροφα

Αν τα $\vec{a}, \vec{b}$ ιδια διευθυνση $\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}: \vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow 1\cdot\vec{a} + (-\lambda)\vec{b} = \vec{0}$

$\Rightarrow \exists\, (1,\lambda) \neq (0,0)$ $\Rightarrow$ τα $\vec{a}, \vec{b}$ ειναι γραμμ. εξαρτημενα

Ορισμος.

$\vec{a}, \vec{b}$ Γ.Ε

$\Updownarrow$

$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$

$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \vec{0}$